

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ  
ИЗУЧЕНИЯ ИСТОРИИ  
АРХИТЕКТУРЫ

*Theoretical questions  
of the history of architecture*

А.Н. Ковалев

## ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПИРАМИД ЕГИПТА. ПИФАГОРОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Использование принципа пропорционального анализа египетских пирамид, основанного на представлении, что основные размеры архитектурных сооружений выбирались равными целым числам мерных модулей, позволяет определить, какой точно был наклон и какой мерный модуль выбрал архитектор (из числа известных в истории египетской архитектуры), несмотря на порою достаточно большой диапазон измеренных углов и длин оснований. Из этого принципа следует правило: при наклоне пирамид, равном дроби  $m/n$ , длина основания должна быть пропорциональна числу  $m$  в выбранном архитектором модуле. Применение его при анализе пирамид, в которых при выборе наклона могли использовать пифагоровы треугольники, позволяет подтвердить гипотезу применения именно таких треугольников в подавляющем большинстве случаев и определить мерный модуль, выбранный архитектором. При этом получается, что из рассмотренных 16 пирамид IV–XII династий, включая малые, только в 6–8 случаях основные размеры задавались в царских локтях. При задании длины основания и высоты пирамиды кроме царского локтя использовались, как минимум, еще четыре других модуля. Показано, что только в 4–6 случаях из 16 при задании наклона мог использоваться секед. Неиспользование секеда в тождественных, но более ранних случаях позволяет выдвинуть гипотезу, что секед, как принцип задания наклона, мог не применяться в Древнем царстве. Подтверждение использования пифагоровых треугольников (3, 4, 5), (8, 15, 17) и (20, 21, 29) в III тысячелетии до н.э. позволяет предположить, что тогда в Египте могли знать теорему Пифагора.

**Ключевые слова:** пропорциональный анализ пирамид, пифагоровы треугольники, мерные модули

A.N. Kovalev

## PROPORTIONAL ANALYSIS OF THE PYRAMIDS OF EGYPT. PYTHAGOREAN TRIANGLES

The use of the principle of proportional analysis of Egyptian pyramids, based on the idea that the main dimensions of architectural structures were chosen equal to whole numbers of dimensional modules, allows us to determine which dimensional module the architect chose and what the exact slope was, despite the sometimes quite large range of measured angles. The rule follows from this principle: with the slope of the pyramids equal to the fraction  $m/n$ , the length of the base should be proportional to the number  $m$  in the module chosen by the architect. Its application in the analysis of pyramids in which Pythagorean triangles could be used to choose the slope, in almost all cases allows us to confirm the hypothesis of using precisely such triangles and to determine the dimensional module chosen by the architect. It turns out that out of the 16 pyramids of the IV–XII dynasties considered, including small ones, only in 6–8 cases were the main dimensions set in royal cubits. When setting the base length and the height of the pyramid, in addition to the royal cubit, at least four other modules were used. It is shown that only in 4–6 cases out of 16 seked could be used when specifying the slope. Confirmation of the use of Pythagorean triangles (3, 4, 5), (8, 15, 17) and (20, 21, 29) in the 3rd millennium BC allows us to assume that the Pythagorean theorem could have been known at that time.

**Keywords:** Proportional analysis of pyramids, Pythagorean triangles, dimensional modules

## ВВЕДЕНИЕ

Есть ряд пирамид Древнего Египта, результаты анализа которых могут иметь отношение к истории и архитектуры, и математики. Это пирамиды, в которых могли быть применены пифагоровы треугольники (3, 4, 5), (20, 21, 29) и (8, 15, 17) в качестве каркасных (половина основания ( $1/2a$ ) — высота ( $h$ ) — апофема ( $c$ )). Историки архитектуры с оглядкой на историков математики, которые не пишут, что эти треугольники и тем более общая теорема Пифагора были известны в то время, не спешат утверждать, что они были использованы при выборе пропорций пирамид. Поэтому приведение убедительной реконструкции, поддерживающей или опровергающей гипотезу применения таких треугольников, позволило бы значительно продвинуться в понимании оснований, предопределивших пропорции таких пирамид.

Пропорции квадратных пирамид задаются одной дробью: отношением ее высоты или к половине длины основания (уклон пирамиды или тангенс угла уклона боковой грани), или к половине длины диагонали основания —  $1/2d$  (тангенс угла уклона ее ребра). Но современное состояние пирамид приводит к невозможности в большинстве случаев точного измерения ни угла уклона боковой грани, ни ее высоты. Если есть некоторое количество хорошо сохранившихся боковых блоков с облицовкой, то можно с некоторым небольшим разбросом измерить угол уклона грани, допускаящий только пару интерпретаций для искомой дроби, но чаще возникает достаточно большой диапазон возможных углов уклона, позволяющий предложить до 3–5 различных вариантов. И появляется проблема нахождения способа выделения среди всех вариантов того, что был использован архитектором.

Вторая проблема — интерпретация найденной дроби, определение причины ее выбора архитектором. Ж.-Ф. Лауэр сформировал принцип выбора наклона архитектором для пирамиды: два искоемых отношения,  $h:1/2a$  и  $h:1/2d$ , должны содержать небольшие числа. Второе отношение было важно для упрощения вытачивания угловых блоков, где надо делать скос. Так, уклон Розовой пирамиды Снофру равен, по Лауэру,  $17/18$ , поскольку был выбран уклон ребра в  $2/3$  (Лауэр 1966: 218). Но некоторые египтологи приравнивают ее уклон  $20/21$ , объясняя этот

выбор существованием пифагоровой тройки (20, 21, 29) (M&R 1963: 128). То есть они предполагают, что *выбор уклона мог определяться конкретной математической находкой и тем самым иметь отношение к истории математики.*

В 1985 г. Г. Робинс и Ч. Шут на основании анализа задач в математическом папирусе Ринда, написанного во время правления XII династии (Среднее царство), выдвинули гипотезу, что наклон пирамид в Древнем Египте определялся по длине основания прямоугольного треугольника, подобного каркасному, при постоянном катете (высоте) в один царский локоть,  $rc$  (Robins 1985). Такое основание называлось *секед*. Секед в 4 ладони (уклон  $7/4$  — подходящая дробь для  $\sqrt{3}$ ) — равносторонний треугольник в сечении по каркасному треугольнику; 5 ладоней (уклон  $7/5$  — подходящая дробь для  $\sqrt{2}$ ) — построенная по нему пирамида очень близка к половине правильного октаэдра, у которого боковая грань равносторонний треугольник. Такой наклон имеет нижняя часть Ломаной пирамиды Снофру, предположительно Ипут II — жены фараона Пепи II (XXIII в. до н.э.) и две пирамиды Аменемхета III (XIX в. до н.э.); 21 палец (уклон  $4/3$ ) — пирамида, предположительно построенная по пифагорову треугольнику (3, 4, 5), пирамиды Хефрена, Тети, Пепи I, Пепи II и других фараонов; 22 пальца — наклон  $14/11$  (пирамида Снофру в Мейдуме, Великая пирамида и ее спутницы и еще не менее четырех больших пирамид V династии), он соответствует треугольнику Кеплера, у которого стороны образуют геометрическую прогрессию. Возникает дилемма: или для наклона выбирался просто целочисленный секед, и тогда из перечисленных выше уклонов нельзя делать выводы о соответствующей математике, или перечисленные уклоны — результат открытия и освоения некоторых математических знаний, которые почитались и увековечивались в камне, а присутствие в числителях перечисленных дробей чисел 4, 7 и 14 могло поддержать выделение локтя в 28 пальцев среди других мерных модулей, закрепить его положение в качестве единичной высоты при проектировании пирамид и привести к появлению понятия *секед*. В качестве первого шага в решении этой дилеммы есть смысл ответить на вопрос: насколько часто секед пирамиды равен целому числу пальцев («хороший» секед)?

Верхняя часть Ломаной и Розовая пирамиды имеют «плохой» секед. Пирамида Хефрена, несмотря на ее секед в 21 палец, могла быть построена без его использования — ее высота скорее всего не была равна целому числу локтей (Щетников 2009: 207), а наклон пирамиды Микерина (4/5) плохо выражается в секедах. Наклон многих пирамид V–VI династий, в которых не заложено использование перечисленных выше случаев и  $h = a$ , когда автоматически получается равенство секеда целому числу пальцев, также плохо описывается в секедах. Возможно, этот способ определять наклон боковых граней пирамид появляется только во время XII династии, когда появился папирус Ринда. Для опровержения последнего предположения требуется найти хотя бы одну пирамиду Древнего царства, секед которой будет однозначно равен целому числу пальцев, например, 13, 15 или 23, без сопутствующего конкретного математического свойства. И хотя в V–VI династиях есть три пирамиды, наклон которых интерпретируется как секед в 13, 15 и 23 пальца (пирамида-спутница Джеккара Исеси в Саккаре, Ипут I, жены фараона Тети, и Сахура в Абусире соответственно), но в случае его использования они имеют высоту, неравную целому числу царских локтей, поскольку длина их основания, 30, 40 и 150 *rc* соответственно (Rossi 2003: App.), не делится на 26, 30 и 46. Но при использовании секеда высота автоматически должна быть равна целому числу царских локтей, поскольку коэффициент пропорциональности между построенной пирамидой и модельной, с высотой в один царский локоть, мог быть равен только целому числу. К тому же нарушается важнейшее свойство всей египетской архитектуры, полученное на основании многочисленного анализа: все архитектурные размеры равны целому числу исходных мерных единиц длины. То есть склонность выразить наклон исследуемых пирамид в секедах часто мешает их анализу. Поэтому возникает необходимость попытки описать размеры и наклон пирамид Древнего царства без использования секеда, чтобы показать вероятность его отсутствия тогда. Представляется, что легче всего начать это рассмотрение с пирамид, где в списке причин выбора наклона есть возможность использования пифагорова треугольника.

## ПРАВИЛО ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Обозначился важный момент для пропорционального анализа пирамид, который есть смысл постулировать: *целочисленную длину основания задавали такой, чтобы выбранный наклон грани приводил к целочисленному значению высоты*. Осталось проверить, есть ли пирамиды, которые ему не удовлетворяют. И хотя наклон пирамиды может быть найден правильно, но при задании длины основания целому числу царских локтей высота не получается равной целому числу царских локтей. Например, основание пирамиды Хефрена в Гизе (секед 21 палец; треугольник (3, 4, 5)) равно 215,2 м, что приравнивается 410 *rc*, а высота — 273 *rc* (Rossi: App.), при которых наклон *примерно равен* 3/4. То есть ими или неявно предполагается, что архитектор в проекте не смог выбрать длину основания, чтобы она делилась хотя бы на три, для получения точных значений высоты и наклона, или он и не думал задавать наклон 3/4. И становится совсем непонятно, какими мотивами руководствовался архитектор при выборе размеров пирамиды. Другие исследователи приравнивают длину основания 411 *rc*, а высоту 274 *rc*, что дает отношение  $h:a = 2,3$ , наклон 3/4, но говорит об неиспользовании пифагоровой тройки (3, 4, 5). Все это толкает египтологов считать, что пифагоров треугольник (3, 4, 5) не использовался в этой пирамиде. Между тем, как показал А.И. Щетников,  $a = 720 \text{ dsr}$ ;  $h = 480 \text{ dsr}$ ;  $c = 600 \text{ dsr}$ , где  $\text{dsr} = 4/7 \text{ rc} = 4$ ;  $p = 299 \text{ мм}$  — аналог фута (Щетников 2009: 207). Применение тройки (3, 4, 5) становится почти очевидным. Есть ли факты, говорящие о возможности знания этого треугольника во времена IV династии? Анализ Щетникова погребальной камеры Хуфу говорит о его знании при возведении Великой пирамиды (Щетников 2009: 210). Существует анализ изображения профиля свода, обнаруженного в комплексе фараона Джосера рядом с северным павильоном и выставленного в каирском музее Имхотепа в Саккаре (JE 50036), который поддерживает представление о еще более раннем его знании — как минимум, с начала III династии (Lightbody 2017), еще до начала строительства истинных пирамид. Эти факты являются доводами и за возможность знания пифагоровой тройки (20, 21, 29) во времена Снофру, и за то, что наклон 3/4 для пирамид вы-

бирался не из-за секеда в 21 палец, а как отражение знания треугольника (3, 4, 5). И задание размеров пирамиды Хефрена не в царских локтях поддерживает это утверждение.

Пример с пирамидой Хефрена показывает, что привычка выражать основные размеры пирамид в царских локтях может мешать их пропорциональному анализу и, как следствие, реконструкции замысла. Если архитектор выбрал для пирамиды наклон  $m/n$ , то он или выберет длину основания, кратную 2  $m$ , чтобы получить высоту, кратную  $n$ , или будет использовать два модуля, имеющих пропорцию  $m/n$ . Основная задача реконструкции пропорции и размеров пирамиды — найти модуль или пару, при которых это выполняется.

Если определить диапазон возможных значений царского локтя в  $525 \pm 4$  мм, как это делает Хирш в своей диссертации (Hirsch 2013: 50), то любая длина больше 34,5 м представима целым числом таких локтей. Поэтому исследователи стараются ограничить отождествление больших размеров царским локтям случаями, кратными 10. Но и при этом остается большая вероятность случайного совпадения. В первом приближении вероятность того, что любая длина ( $l$ ) от 30 до 300 м представима как  $10 \cdot nrc$ , где  $rc = 525 \pm 4$  мм, равна  $P = 0,003 \cdot l$ , где  $l$  — в метрах. То есть вероятность того, что длина, близкая к 100 (200) м, выразится как  $10 \cdot nrc$ , равна 0,3 (0,6) — очень высокая, чтобы пренебречь случайностью совпадения. Одновременно это говорит о том, что диапазон значений царского локтя, определенный Хиршем, может быть завышен.

В связи с вероятностью использования при проектировании пирамид не только царских локтей возникает потребность определить список возможно применяемых мерных модулей. А.Н. Ковалев определил, что при фараоне Джосере (основатель III династии) появился комплект модулей ( $mH_1/mH_5$ ), связанных дробными пропорциями, большинство которых являются приближениями для  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{5}$ –7/5, 7/4 и 9/4 (Ковалев 2021). Диапазон возможных значений основного из них, который, скорее всего, появился еще при I династии<sup>1</sup>:

$$mH_1 = 633 \pm 3 \text{ мм (8 ладоней)},$$

был определен на основании анализа комплекса Джосера и Ломаной пирамиды Снофру. Модуль в 635 мм впервые выделяет Исаак Ньютон, назвав его «Локтем Пирамид» (Hirsch 2013: 25). Среди модулей Хесира отметим еще:

$$dsr_0 = 1/2mHe_1 = 316,5 \pm 1,5 \text{ мм},$$

возможно, первый египетский модуль, соотносимый с длиной ступни, выделение которого, как минимум, во времена Джосера подтверждается анализом саркофага из южной мастабы его погребального комплекса (Ковалев 2022).

Еще отметим модуль:

$$Nbj \approx 5/4 rc = 655 \pm 1 \text{ мм},$$

который был использован в пирамиде фараона Снофру в Мейдуме и мог появиться ранее царского локтя (Ковалев 2021). Строгая связь  $Nbj$  с  $rc$  объясняется тем, что  $Nbj = 7/4$  remen, а  $rc = 7/5$  remen (Hirsch 2013: 46).

Поскольку размеры пирамид часто указаны только в царских локтях, то хорошо знать, чему они равны в других модулях. Для этого можно использовать, что в первом приближении  $3 rc \approx 5 dsr_0$  или более точно:  $20 rc \approx 33 dsr_0$ .

### ЛОМАНАЯ ПИРАМИДА СНОФРУ

Сохранился пирамидион, соответствующий нижней ее части с уклоном в 7/5 (Rossi 2003: 209). Это говорит о возможном существовании первоначального проекта без излома. Но при принятом основании в 362  $rc$  (Rossi 2003: App.) не получается целочисленной величины ее высоты, поскольку 362 не делится на 10. Но длина основания равна и 300  $mHe_1$  ( $mHe_1 = 632$  мм), а значит в проекте предполагалась высота в 210  $mHe_1$  (Ковалев 2021: 41, 42). При этом анализ размеров погребальных камер пирамиды подтверждает использование комплекта модулей Хесира (Ibid).

Пирамидион, согласно реконструкции, имел основание 157–158 см, что было отождествлено с 3  $rc$ . Тогда его высота была равна  $7/5 \cdot 3 rc = 2 + 1/10 rc$  (Rossi 2003: 209), появление в которой  $1/10 rc$  — следствие

<sup>1</sup> Длина в 635 мм была «сакральной» и использовалась для задания размеров культовых предметов и построек. Ей равна длина знаменитой палетки Нармера (Менеса), основателя I династии, и длина скипетра сеем, как минимум, во время III династии (Ibid). Есть основания предполагать, что он пришел из Месопотамии.

определения размеров в царских локтях. Но основание равно  $5 \text{ } dsr_o$  (20 ладоней), а высота —  $mHe_3$  ( $7/4 mHe_1 = 14$  ладоней) (Ковалев 2021: 42). То есть в пирамидионе и пирамиде использовался один и тот же комплект модулей, что представляется естественным. О применении модулей Хесира говорит и анализ пропорций погребальных камер в ней (Ковалев 2021: 41).

Выбор для основных размеров модуля  $mHe_1$ , а не царского локтя, говорит, что секед в пирамиде не использовался, несмотря на его хорошее значение для ее нижней части. Что подтверждается и анализом пирамидиона.

Как отмечалось во введении, относительно уклона верхней части Ломаной пирамиды нет общепринятого мнения. Разброс измерения угла позволяет выбрать любой от 14/15 до 21/22. Но небольшой математический анализ позволяет уменьшить число претендентов. Например, для верхней части Ломаной пирамиды не могли выбрать уклон в 17/18, исходя из выбора наклона ребра в 3/2, как предполагал Лауэр, поскольку это говорило бы о знании дроби 17/12 для  $d/a$ . Действительно:

$$\frac{d}{a} = \frac{d}{2h} \times \frac{2h}{a} = \frac{3}{2} \times \frac{17}{18} = \frac{17}{12}, \quad (1)$$

но уклон нижней ее части в 7/5, при предлагаемой Росси его трактовке, говорит о знании только этого приближения к  $\sqrt{2}$ . При использовании дроби 7/5 получается, согласно (1), равенство отношения  $h:1/2a$  дроби 14/15. Эта дробь дает угол уклона грани  $43^\circ 15'$ , который близок к измеренному Перрингом ( $42^\circ 59' 26''$ ) и Петри ( $43^\circ 05'$ ) (Rossi 2003: App.). Отметим, что уклону 20/21, который предпочитают некоторые египтологи, соответствует угол ( $43^\circ 36' 10''$ ). Возможно, был выбран уклон именно 14/15 для получения наклона ребра в 3/2.

### ПИРАМИДА-СПУТНИЦА ЛОМАННОЙ

Длина ее основания равна 53 м (Lehner 1997: 102), что обычно приравнивают 100 *рс*, а уклон считается или равным, или несколько большим, чем в верхней части Ломаной (Rossi 2003: App.). Во-первых, отметим, что при этом царский локоть выходит за пределы, определенные Хир-

шем. Во-вторых, 100 не делится на четные числа от 30 до 44. Но  $53 \text{ м} = 84 \cdot mHe_1$ , а 84 делится на 42. Это серьезный довод за выбор уклона в 20/21 и как следствие — за знание пифагорова треугольника (20, 21, 29). Тогда ее высота равна  $40 mHe_1$  (25,3 м), и в пирамиде-спутнице применялся тот же модуль, что и в Ломаной пирамиде, что представляется закономерным.

Этот анализ является доводом за представление, что и в верхней части Ломаной применялся уклон 20/21. Логично считать, что они были равны. По крайней мере, все остальные пирамиды-спутницы IV династии имеют тот же уклон что и большие пирамиды, в случае если пара допускает однозначную интерпретацию их пропорций. Это мнение поддерживает и факт, что возведение спутницы шло параллельно со строительством верхней части Ломаной (Lehner 1997: 102). С другой стороны, Ломаная — первая пирамида, у которой была выстроена спутница, и она не обязана была следовать пока еще не существующей традиции.

### РОЗОВАЯ ПИРАМИДА СНОФРУ

Рейснер измерил длину основания как 218,5 м (северная и южная стороны) и 221,5 м (западная и восточная стороны), а Перринг определяет ее как 219,28 м (M&R 1963). Если взять последний вариант, то  $a \approx 420 \times 522$  мм. Анализ погребальных камер, в котором выделяется модуль в 522 мм, поддерживает его (Ковалев 2021: 42). Для уклона пирамиды Перринг измерил угол в  $43^\circ 36' 11''$ , а Петри —  $44^\circ 36'$  — близко к уклону верхней части Ломаной (Rossi 2003: App.). Странники секеда определяют его для этой пирамиды в 29 пальцев (Rossi 2003: 219), чему соответствует угол уклона  $44^\circ$ . Кратность длины основания 42 автоматически дает и вариант выбора уклона — 20/21, который предельно близок к измерению Перринга. При этом высота пирамиды равна 200 *рс*. Это достаточно напрашивающееся решение, которое приводит и Росси (Ibid). Что не позволяет окончательно утвердиться этому варианту? Отсутствие поддержки со стороны истории математики и представление о распространённости применения секеда<sup>2</sup>. В случае примене-

<sup>2</sup> Представление, что секед использовался сразу с появлением первым «истинных» пирамид согласовано с мнением, что «...египетский царский локоть длиной от 0,5235 до 0,524 м» применялся «... во всех сооружениях Египта начиная с первых династий...» (Лауэр 1966: 138). Между тем царский локоть появился

ния секеда (или варианта Лауэра) длина основания должна была быть пропорциональна 58 (или 34). Несмотря на большой диапазон длин оснований (218,5/221,5 м), она не кратна 58  $rc$  ( $rc = 525 \pm 4$  мм) — секед не использовался. Рассмотрение ее кратности 34, при  $\alpha = 218,5/221,5$  м, не дает ни один из рассмотренных во введении модулей.

О возможности применения в этой пирамиде тройки (20, 21, 29) пишут с середины прошлого века (*M&R* 1963: 128), но если она и была найдена до возведения Ломаной или Розовой пирамид, то только после «священного египетского треугольника» (3, 4, 5), в результате, скорее всего, инициированного этим фактом поиска других троек методом перебора такого целого  $n$ , что:

$$n^2 + (n + 1)^2 = m^2. \quad (2)$$

При  $n < 100$  существуют только два решения:  $n = 3$  и  $20^3$ .

#### ПИРАМИДА-СПУТНИЦА ХЕФРЕНА

Пирамида имеет тот же уклон, что и основная —  $4/3$ , что говорит о возможности использования в ней треугольника (3, 4, 5), но длина ее основания приравнивается 40  $rc$  (*Rossi* 2003: App.). Поскольку 40 не делится на 3, то имеем высоту, не равную целому числу царских локтей, что не позволяет исследователям говорить о применении этого треугольника. Между тем длина основания равна и  $66 \, dsr_o$ , и треугольник (3, 4, 5) имеет стороны (33, 44, 55)  $dsr_o$ . Здесь, как и в Великой пирамиде, длина основания выбрана пропорциональной 11. Отметим, что и в ней секед не использовался.

#### ПИРАМИДЫ УСЕРКАФА И ЕГО ЖЕНЫ

Пирамида фараона имеет угол уклона  $53^\circ$ , для которого есть подходящая дробь  $4/3$  ( $53^\circ 8'$ ), но длину основания, 70,4 м (*Замаровский* 1981: 311), приравнивают 134  $rc$ , что не делится на 3, дает высоту, не равную целому числу локтей, и не позволяет уверенно говорить о применении тройки (3, 4, 5). Но половина длины ее основания равна и  $3 \cdot 37 \, dsr_o$  ( $dsr_o = 317$  мм), что дает высоту —  $4 \cdot 37 \, dsr_o$  и апофему —  $5 \cdot 37 \, dsr_o$ .

Пирамида-спутница с близким наклоном имеет основание в 40  $rc$ , но исследо-

ватели не уверены по поводу ее уклона, допуская, что он мог и не быть равен  $4/3$  (App.). Неделимость 40 на 3 поддерживает их сомнения. Но поскольку ее основание равно и  $66 \, dsr_o$ , как у пирамиды-спутницы Хефрена, то это поддерживает вариант использования треугольника (3, 4, 5) со сторонами ( $3 \times 11, 4 \times 11, 5 \times 11$ )  $dsr_o$ .

Длина основания пирамиды жены фараона равна около 25 м, что приравнивается 50  $rc$  (*Rossi* 2003: App.). Поскольку считается, что ее уклон был равен  $4/3$ , то получается высота, не равная целому числу локтей. Если ее приравнять 48  $rc$  ( $48 \cdot 52,4$  см = 2515 см), то высота равна 32  $rc$ , и мог быть использован треугольник со сторонами (24, 32, 40)  $rc$ . Здесь склонность определять длину основания пирамид кратной 10, объяснимая с точки зрения желания избежать случайного совпадения, мешает пропорциональному анализу. Но если длина ее основания была равна примерно 24,8 м, т.е. можно приравнять  $2 \cdot 3 \cdot 13 \, dsr_o$ , что приводит к священному египетскому треугольнику со сторонами ( $3 \times 13, 4 \times 3, 5 \times 13$ ). Этот вариант предпочтительней первого, поскольку в нем используется тот же модуль, что и в первых двух пирамидах. Но окончательный ответ даст более точное измерение длины основания.

Тот факт, что длина основания в первых двух пирамидах в царских локтях не делится на 3, является для египтологов поводом считать, что пифагоров треугольник (3, 4, 5) в них не был использован, а просто его секед равен 21 пальцу. Но, как уже писалось во введении, использование секеда автоматически подразумевает равенство высоты целому числу царских локтей. Проведенный анализ говорит об обратном. Выделившиеся три треугольника интересны тем, что их стороны в  $dsr_o$  равны произведению (3, 4, 5) на простые числа — 11, 13 и 37.

Можно оценить вероятность случайного совпадения. Вероятность того, что любое число от 15 до 30 попадет в интервалы  $n \cdot (6(ds_r_o \pm 1,5 \text{ мм}))$  для всех  $n$ , равна 0,110. Вероятность того, что два наугад взятых разных числа одновременно попадут в эти интервалы, равна  $(0,11)^2 = 0,0121$ . Вероятность того, что любое число от 60 до 80 попадет в интервал  $n \cdot (6(ds_r_o \pm 1 \text{ мм}))$ , равна 0,244. Вероятность того, что одно-

не ранее III–IV династий (*Ковалев* 2021) и довольно не сразу был утвержден в качестве эталона.

<sup>3</sup> Следующее решение  $n = 119$ .

временно произойдут эти три события равна  $0,0121 \cdot 0,244 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . Вероятность того, что любых три целых числа от 10 до 40, не равные между собой, окажутся простыми, равна  $8/31 \cdot 7/30 \cdot 6/29 \approx 1/80$ . Вероятность того, что все перечисленное произойдет одновременно, равна  $3 \cdot 10^{-3}/80 \approx 3,75 \cdot 10^{-5}$  — достаточно мала, чтобы считать полученный результат не случайным совпадением.

### ПИРАМИДА НЕФЕРИРКАРА В АБУСИРЕ

Л. Борхардт измерил ее длину в 104 м и уклон в  $53^\circ 5'$ , но сделал ошибку при вычислении ее высоты, получив 73,5 м вместо  $52 \cdot \operatorname{tg}(53^\circ 5') = 69,2$  м (Замаровский 1981: 317). Эта ошибка подтолкнула Р. Барроуза, профессора Лондонского университета, предположить, что в ней уклон был задан иррациональным числом  $\sqrt{2}$ , поскольку  $73,5/52 = 1,413$  (Burrows 2018: 74–87). Но для  $\operatorname{tg}(53^\circ 5') \approx 1,33$  существует подходящая дробь  $4/3$ , что говорит о возможности использования треугольника (3, 4, 5), что отмечает и К. Росси (Rossi 2003: App.). Длина ее основания была приравнена 200 *rc* (*rc* = 52 см) (Lehner 1997: 144), что не делится на 3. Росси вполне справедливо поставила это приравнивание под сомнение (Rossi 2003: App.), считая, что высота тоже должна быть равна круглому числу царских локтей, Вернер приравнял ее 140 *rc* или 72,8 м, что дает уклон  $7/5$  и угол уклона  $54^\circ 28'$  (Verner 2001: 287–292). Но  $104 \text{ м} \approx 198 \cdot 525 \text{ мм} = 6 \cdot 33 \text{ rc}$ . То есть в пирамиде мог быть использован треугольник ( $3 \times 33$ ,  $4 \times 33$ ,  $5 \times 33$ ), что полностью соответствует измерениям Борхардта. 104 м равно и  $330 (2 \cdot 3 \cdot 55) \operatorname{dsr}_0$  ( $\operatorname{dsr}_0 = 315,2 \text{ мм}$ ), и мог быть использован и этот модуль. Тогда пифагорова тройка — ( $3 \times 55$ ,  $4 \times 55$ ,  $5 \times 55$ ), при применении которой  $a$  и  $h \sim 10$ .

### ПИРАМИДЫ ТЕТИ, ПЕПИ I И ПЕПИ II

Эти три пирамиды VI династии имеют длину основания 150 *rc*, а их первоначальная высота оценивается в 100 *rc* (Rossi 2003: App.). Еще Лауэр писал, что в них, скорее всего, использовался треугольник (3, 4, 5), поскольку  $150 = 2 \cdot 3 \cdot 25$ , а  $100 = 4 \cdot 25$  (Rossi 2003: 159). Число 25 могло быть выбрано, поскольку при этом высота пирамиды получается равной 100 царским локтям.

Многие египтологи и историки архитектуры именно их считают первыми до-

стойными внимания свидетелями знания этого пифагоровой тройки (Rossi 2003: 219). Но поскольку именно у них высота позволяет с уверенностью говорить о возможности использования секеда в 21 палец, то факт знания и применения треугольника (3, 4, 5) можно поставить под сомнение. Как это ни парадоксально, но рассмотренные выше примеры пирамид с длиной основания (в царских локтях), не делящейся на шесть, с высотой, не равной целому числу царских локтей, которые египтологи обычно отмечают при поиске фактов применения этого треугольника, достаточно уверенно свидетельствуют «за» его использование, если отойти от привычки все размеры выражать в царских локтях, а эти три пирамиды — нет. И только анализ предшествующих пирамид позволяет утверждать, что и в этих трех был использован треугольник (3, 4, 5).

### ПИРАМИДА ЖЕНЫ ФАРАОНА ТЕТИ, ИПУТ I

Есть ряд пирамид, наклон которых позволяет предположить, что в них могла быть использована пифагорова тройка (8, 15, 17), и только представление, что во время их строительства теорема Пифагора не была известна в Египте, оставляет вопрос открытым. И первая из них принадлежит жене фараона Тети (VI династия, XXIV в. до н. э.) — Ипут I, для которой существует вторая конкурирующая реконструкция: ее секед равен 15 пальцев. Уклон пирамиды равен  $62^\circ$  (Rossi 2003: App.), для тангенса которого есть подходящая дробь  $15/8 (\operatorname{artg}(15/8) \approx 61^\circ 56')$ . При секеде 15 пальцев получается угол  $61^\circ 49'$ . Длина ее основания в царских локтях — 40, половина которой не делится ни на 8, ни на 15. Но  $40 \text{ rc} = 32 \text{ Nbj}$ . В *Nbj* целочисленными являются и высота (30), и апофема (34) этой пирамиды, если уклон был выбран для увековечивания находки:  $8^2 + 15^2 = 17^2$ . Что касается секеда в 15 пальцев или уклона  $28/15$ , то длина основания при выражении ее во всех рассмотренных выше единицах длины не делится на 30. Это предполагает предпочесть вариант выбора архитектором пифагорова треугольника (8, 15, 17), который дает и лучшее приближение к измеренному углу наклона и одновременно отмечает претендента на поддержание представления, что секед использовался при задании наклона пирамид в Древнем Египте,

без какой-либо связи с математическим содержанием.

## ПИРАМИДЫ XII ДИНАСТИИ

Следующие пирамиды с той же проблемой выбора относятся уже к XII династии.

Пирамида первой жены Сенурсета I, Нофру, имеет сторону основания  $40\text{ }rc$  и предполагаемый угол уклона  $62^\circ 30'$  (Rossi 2003: App). Для нее предлагается возможность двух интерпретаций: треугольник (8, 15, 17) или секед 15 пальцев (Ibid).  $40$  не делится ни на  $16$ , ни на  $30$ , но  $40\text{ }rc = 32\text{ }Nbj$ , и это довод предпочесть вариант пифагорова треугольника. Но  $40\text{ }rc \approx 66\text{ }dsr_0$ , и есть вероятность уклона  $21:11$ , который интересен из-за пропорциональности длины основания  $11$ , а  $21$  — произведение двух чисел Осириса. Ему соответствует угол  $62^\circ 21'$  — наиболее близкий к измеренному из трех предлагаемых вариантов.

Пирамиды второй и третьей жен Сенурсета III имеют длину  $32\text{ }rc$  и угол уклона  $61$ – $63^\circ$  (Ibid). В этом диапазоне углов, возможно, достаточно много различных подходящих дробей, но считаются интересными только те же два варианта. Росси добавляет еще один вариант:  $h = a$  (Ibid), которому соответствует угол  $63^\circ 26'$ . Последний вариант допускает выбор длины основания, равной любому четному числу у.е., при котором естественно было бы ожидать предпочтение  $a$ , кратного  $10$ , например —  $30\text{ }rc$ , как в пирамидах 6–9 жен Сенурсета I ( $h = a$ ) (Ibid). Но поскольку  $32$  делится на  $16$ , то это позволяет пока предпочесть вариант пифагорова треугольника.

И хотя математический папирус Ринда, в котором говорится о применении секеда при задании наклона пирамид, написан во время правления XII династии, в одном из трех рассмотренных случаев он не использовался — ее высота не равна целому числу царских локтей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Правило — *целочисленная длина основания задается так, чтобы выбранный наклон грани приводил к целочисленному значению высоты* — оказалось очень продуктивным, позволив почти во всех рассмотренных случаях восстановить использованный модуль и уклон пирамид, несмотря на разброс в измерениях возможных углов наклонов и длин осно-

ваний. И пока не обнаружилось ни одной пирамиды, которая не удовлетворяла бы ему.

Из рассмотренных  $16$  пирамид IV–XII династий, включая малые, в задании каркасных треугольников которых ( $1/2a$ ,  $h$ ,  $c$ ) могли быть использованы пифагоровы треугольники (3, 4, 5), (21, 20, 29) и (8, 15, 17), только в 6–8 случаях основание и высота задавались в царских локтях. В 8–10 остальных случаях использовался  $dsr_0$  (5–3 раза),  $dsr$  (2 раза),  $mHe_1$  (2 раза) и  $Nbj$  (1–2 раза). Отметим, что только в 4–5 случаях из  $16$  в проекте одновременно получился хороший секед, и высота была равна целому числу царских локтей. При этом в 4–5 самых ранних случаях применения треугольника (3, 4, 5) секед не использовался, поскольку их высота не задавалась равной целому числу царских локтей. То есть можно говорить о знании пифагорова треугольника (3, 4, 5) во время их строительства. Пропорциональность длин оснований всех пирамид, в которых допускается использование треугольника (8, 15, 17), числу  $16$  является сильным доводом за его применение. Эти факты говорят о возможности знания теоремы Пифагора в Египте в III тыс. до н. э.

Из  $16$  пирамид только в шести случаях длина основания была кратна  $10$  у.е. Это противоречит устойчивому представлению, что архитекторы старались задать длину основания пирамид, кратной  $10$ . Скорее эта кратность возникла на соединении попытки историков избежать случайного совпадения в интерпретации длины и привычки выражать ее в царских локтях.

В 3–4 рассмотренных пирамидах в длине основания использовался сомножитель  $11$ , и можно говорить о выделении числа  $11$  в архитектуре. Размеры вертикальной шахты в ступенчатой пирамиде Джосера равны  $11 \times 11\text{ }mHe_1$  ( $7 \times 7\text{ м}$ ), внутренние размеры его комплекса —  $440 \times 880\text{ }mHe_1$ . В мастабе Хесира было  $11$  деревянных панелей, изображающих его открытия, должности и звания. Длина основания пирамиды Снофру в Мейдуме —  $220\text{ }Nbj$ , пирамиды Хуфу —  $440\text{ }rc$ . Как минимум, еще у двух-трех пирамид V династии длины оснований были кратны  $11$ , хотя их наклон не равен  $11/m$  (Rossi 2003: App).

В Новом царстве есть ряд небольших пирамид с уклоном примерно в  $67$  и  $74^\circ$ , которые могли быть выбраны и как использование секеда в 3 и 2 ладони, ко-

торым соответствуют углы  $66^{\circ} 48'$  и  $74^{\circ} 03'$ , так и пифагоровых треугольников (5, 12, 13) и (7, 24, 25), которым соответствуют углы  $67^{\circ} 23'$  и  $73^{\circ} 44'$  (Rossi 2003: 231–234). Представляется, что их анализ по примененной в этой статье методике может позволить однозначно реконструировать замысел древних архитекторов. В первом случае длины их оснований должны быть

пропорциональны 6 и 4 у.е., а во втором — 10 и 14 у.е. Но если, например, в первом случае  $a \sim 30$  у.е., то выбор будет невозможен, и остается надеяться на сохранность пирамидионов, длины оснований которых должны удовлетворять тем же свойствам делимости и быть выражены в тех же модулях.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Замаровский 1981 — Замаровский В. Их величества пирамиды. М.: Наука, 1981.
- ИМ 1970 — История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1970.
- Ковалев 2021 — Ковалев А.Н. Эволюция системы модулей в контексте истории математики. Появление царского локтя в Древнем царстве Египта // Вопросы всеобщей истории архитектуры. 2021. № 2 (17). С. 33–46.
- Ковалев 2022 — Ковалев А.Н. Эволюция системы модулей в контексте истории математики. Фут и дюйм в Древнем царстве Египта // Вопросы всеобщей истории архитектуры. 2022. № 1 (18). С. 23–37.
- Лауэр 1966 — Лауэр Ж.-Ф. Загадки египетских пирамид. М.: Наука, 1966.
- Щетников 2009 — Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Историко-математические исследования. 2009. № 13 (48). С. 198–216.
- Burrows 2018 — Burrows R. 3D Thinking in Design and Architecture: From Antiquity to the Future. London: Thames & Hudson, 2018.
- Hirsch 2013 — Hirsch A.P. Ancient Egyptian Cubits — Origin and Evolution: PhD thesis. Toronto, 2013.
- Lehner 1997 — Lehner M. The Complete Pyramids. London: Thames & Hudson, 1997.
- Lightbody 2017 — Lightbody D.I., Monnier F. An Elegant Vault Design Principle Identified in Old and New Kingdom Architecture // JAEA. 2017. Vol. 2. P. 55–69.
- M&R 1963 — Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Menfite. Parte III. Il Complesso di Meydum, la piramide a Doppia Pendenza e la piramide Settentrionale in Pietra di Dahsiur. Torino: Artale, 1963.
- Robins 1985 — Robins G., Shute Ch.C.D. Mathematical Based of Ancient Egyptian Architecture and Graphic Art // Historia Mathematica. 1985. Vol. 12. No. 2. P. 107–122.
- Rossi 2003 — Rossi C. Architecture and Mathematics in Ancient Egypt. Cambridge University press, 2003.
- Verner 2001 — Verner M. The Pyramids: The Mystery, Culture, and Science of Egypt's Great Monuments. New York: Grove Press, 2001.

## REFERENCES

- Zamarovskii V. *Ikh velichestva piramidy (Their Majesties Pyramids)*. Moscow: Nauka Publ., 1981 (in Russian).
- Istoriia matematiki s drevneishikh vremen do nachala XIX stoletii (History of Mathematics from Ancient Times to the Beginning of the 19th Century. In 3 vols), vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1970 (in Russian).
- Kovalev A.N. Evolyutsiya sistemy modulei v kontekste istorii matematiki. Poyavleniye tsarskogo loktya v Drevnem tsarstve Yegipta (Evolution of the System of Modules in the Context of the History of Mathematics. The Appearance of the Royal Cubit in the Ancient Kingdom of Egypt). *Voprosy vseobshchey istorii arkhitektury (Questions of the History of World Architecture)*, no. 2 (17), 2021, pp. 33–46 (in Russian).
- Kovalev A.N. Evolyutsiya sistemy modulei v kontekste istorii matematiki. Fut i diuim v Drevnem tsarstve Yegipta. (Evolution of the System of Modules in The Context of The History of Mathematics. Foot and Inch in the Old Kingdom of Egypt). *Voprosy vseobshchey istorii arkhitektury (Questions of the History of World Architecture)*, 2022, no. 2 (18), pp. 23–37 (in Russian).
- Shchetnikov A.I. Zolotoe sechenie, kvadratnye korni i proporsii piramid v Gize

- Golden ratio, square roots and proportions of the pyramids at Giza (The Golden Ratio, Square Roots, and the Proportions of the Pyramids at Giza). *Istoriko-matematicheskie issledovaniia (Historical and mathematical research)*, 2009, vol. 13 (48), pp. 198–216 (in Russian).
- Burrows R. *3D Thinking in Design and Architecture: From Antiquity to the Future*. London: Thames & Hudson Publ., 2018.
- Hirsch A.P. *Ancient Egyptian Cubits — Origin and Evolution: PhD thesis*. Toronto, 2013.
- Lehner M. *The Complete Pyramids*. London: Thames & Hudson Publ., 1997.
- Lightbody D.I., Monnier F. An Elegant Vault Design Principle Identified in Old and New Kingdom Architecture. *The Journal of Ancient Egyptian Architecture*, vol. 2, 2017, pp. 55–69.
- Robins G., Shute Ch.C.D. Mathematical Based of Ancient Egyptian architecture and graphic art. *Historia Mathematica*, vol. 12, no. 2, 1985, pp. 107–122.
- Rossi C. *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*. Cambridge University press, 2003.
- Verner M. *The Pyramids: The Mystery, Culture, and Science of Egypt's Great Monuments*. New York: Grove Press, 2001.